

2019—2020 学年度上期八市重点高中联盟

“领军考试” 高三数学试题 (理数)

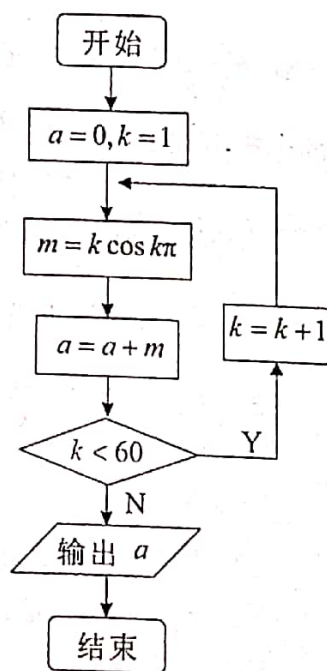
注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名, 准考证号填写在本试题相应的位置。
2. 全部答案在答题卡上完成, 答在本试题上无效。
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案用 0.5mm 黑色笔迹签字笔写在答题卡上。

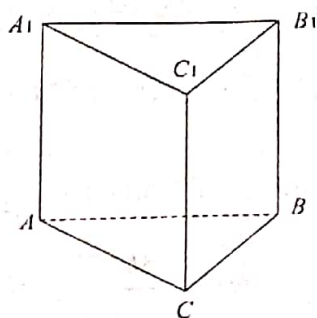
4. 考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{y | y = 3^x\}$, $N = \{x | 0 < x \leq 2\}$, 则 $M \cap N =$
 A. $\{x | 0 < x < 2\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 2\}$ C. $\{x | x \leq 2\}$ D. $\{x | x > 0\}$
2. 设 $z(-2+i) = 5$, 则在复平面 $\bar{z}$ 对应的点位于
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. “函数 $f(x) = (2a-1)^x$ 是增函数” 是 “ $a > 2$ ” 的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知 BC 是半径为 1 的圆 O 的一条直径, 点 A 是圆上一动点, 则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的最大值等于
 A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 2
5. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 且 a_2, a_{4038} 是函数 $f(x) = x^2 - 8x + 3$ 的两个零点, 则 a_{2020} 的值为
 A. 4 B. -4
 C. 4038 D. -4038
6. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 a 值为
 A. -30 B. 0
 C. 30 D. 60
7. 从 $[-6, 9]$ 中任取一个数 m , 则直线 $3x + 4y + m = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 = 2$ 截得的弦长大于 2 的概率为
 A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$
 C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{5}{8}$



8. 我国古代数学名著《九章算术》中有堑堵一说,“堑堵”意指底面为直角三角形,且侧棱垂直于底面的三棱柱,如图所示的“堑堵” $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = AA_1 = 2$, $AC = BC$, 则“堑堵”的外接球的表面积为



- A. 8π B. 4π
C. $2\sqrt{2}\pi$ D. 2π

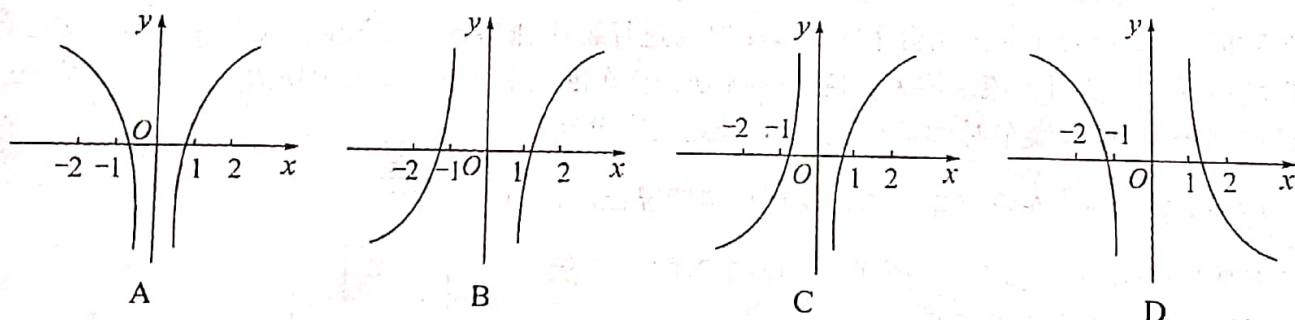
9. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 点 $M(2, y_0)$ 在抛物线 C 上,

$\odot M$ 与直线 l 相切于点 E , 且 $\angle EMF = \frac{\pi}{3}$, 则 $\odot M$ 的半径为

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{16}{3}$

10. 函数 $g(x)$ 的图象可看作是将函数 $f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x-1} + x - 1$ 的图象向左平移一个单位长度

而得到的, 则函数 $g(x)$ 的图象可能是



11. 已知函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的导函数, 且满足 $x > 0$ 时, $\ln xf'(x) + \frac{1}{x}f(x) < 0$, 则 $(x-2019)f(x) > 0$ 的解集为

- A. $(-1, 0) \cup (1, 2019)$ B. $(-2019, -1) \cup (1, 2019)$
C. $(0, 2019)$ D. $(-1, 1)$

12. 已知球 O 的表面积为 64π , A, B, C 在球面上, 且线段 AB 的长为 $4\sqrt{2}$, 记 AB 的中点为 D , 若 OD 与平面 ABC 的所成角为 60° , 则三棱锥 $O-ABC$ 外接球的体积为

- A. $\frac{256\sqrt{3}}{27}\pi$ B. $\frac{512\sqrt{3}}{27}\pi$ C. $\frac{256\sqrt{6}}{27}\pi$ D. $\frac{512\sqrt{6}}{27}\pi$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - y - 2 \leq 0, \\ x + 2y - 5 \geq 0, \\ y - 2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = x^2 + y^2 + 2y$ 的最大值为_____.

14. 已知 $(2x-1)(x+a)^6$ 的展开式中 x^5 的系数为 24, 则 $a=$ _____.

15. 已知各项均为正数的递增数列 $\{a_n\}$ 满足 $4a_n - a_{n+1} = 3a_n \cdot a_{n+1}$, 则首项 a_1 的取值范围为_____.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 又点 $N(-c, \frac{3b^2}{2a})$, 若双曲线 C 左支上的任意一点 M 均满足 $|MF_2| + |MN| > 4b$, 则双曲线 C 的离心率的取值范围为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 60 分.

17. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AB + AC = 10$.

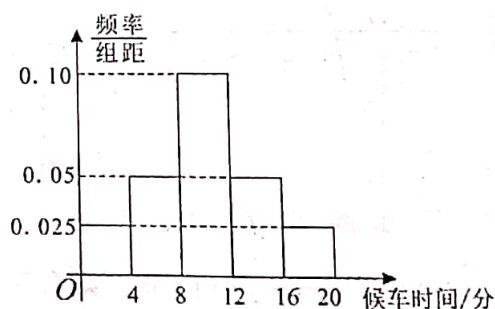
(1) 当 $\cos \angle ACB = -\frac{1}{9}$, $AC = 3$ 时, 求 $\sin \angle ABC$ 的值;

(2) 当 $BC = 6$, $\cos \angle BAC = \frac{1}{3}$ 时, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12分)

为提高城市居民生活幸福感, 某城市公交公司大力确保公交车的准点率, 减少居民乘车候车时间. 为此, 该公司对某站台乘客的候车时间进行统计. 乘客候车时间受公交车准点率、交通拥堵情况、节假日人流量增大等情况影响. 在公交车准点率正常、交通拥堵情况正常、非节假日的情况下, 乘客候车时间随机变量 X 满足正态分布

$N(\mu, \sigma^2)$. 在公交车准点率正常、交通拥堵情况正常、非节假日的情况下, 调查了大量乘客的候车时间, 经过统计得到如图频率分布直方图.



(1) 在直方图各组中, 以该组区间的中点值代表该组中的各个值, 试估计 μ, σ^2 的值;

(2) 在统计学中, 发生概率低于千分之三的事件叫小概率事件, 一般认为, 在正常情况下, 一次试验中, 小概率事件是不能发生的. 在交通拥堵情况正常、非节假日的某天, 随机调查了该站的 10 名乘客的候车时间, 发现其中有 3 名乘客候车时间超过 15 分钟, 试判断该天公交车准点率是否正常, 说明理由.

(参考数据: $\sqrt{19.2} \approx 4.38, \sqrt{21.4} \approx 4.63, \sqrt{26.6} \approx 5.16$,

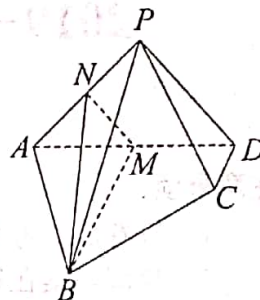
$0.8413^7 \approx 0.2898, 0.8413^6 \approx 0.3546, 0.1587^3 \approx 0.0040, 0.1587^4 \approx 0.0006$,

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$,

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$)

19. (12分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=PD$, $AB=AD$, $PA \perp PD$, $AD \perp CD$, $\angle BAD=60^\circ$, M, N 分别为 AD, PA 的中点.



(1) 证明: 平面 $BMN \parallel$ 平面 PCD ;

(2) 若 $AD=6, CD=\sqrt{3}$, 求平面 BMN 与平面 BCP 所成锐二面角的余弦值.

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别是 F_1, F_2 , 以原点为圆心, 椭圆的

短半轴长为半径的圆与直线 $y = \sqrt{2}x + 3$ 相切, 点 P 在椭圆 C 上, $|PF_1| = 2, \angle F_1PF_2 = 60^\circ$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 且 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{b^2}{a^2}$, $\triangle AOB$ 的面

积是否为定值? 若是, 求出定值; 若不是, 请说明理由.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - 2(x - \ln x)$, $a = (x, e^x), b = (-\sin x, \cos x)$, $g(x) = a \cdot b$.

(1) 当 $x > 0$ 时, 证明: $f(x) > 0$;

(2) 当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 时, 试判断 $g(x)$ 的零点个数.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

以平面直角坐标系 xOy 的坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 已知椭圆

T 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的极坐标方程 $\rho \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 与椭圆 T

相交于 P, Q 两点.

(1) 写出直线 l 的普通方程与参数方程;

(2) 将椭圆 T 的参数方程转化为普通方程, 并求弦长 PQ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |x+1| + |x-a|, g(x) = -x^2 - x + 2$.

(1) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 $2a^2$, 求实数 a 的值;

(2) 当 $x \in [-1, +\infty)$ 时, 函数 $y = f(x)$ 图象恒在函数 $y = g(x)$ 图象的上方, 求 a 的取值范围.